BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Р.А.АЛИЕВ[1], И.А.КУРБАНОВ[2]
Азербайджанский Университет Кооперации[1],
Бакинский Государственный Университет[2]

Ряд прикладных задач связан с определением коэффициентов эллиптического уравнения по некоторой дополнительной информации о решении. В частности, определение теплофизических характеристик среды в стационарном случае приводит к обратным задачам для эллиптических уравнений. Настоящая работа посвящена исследованию вопросов корректности одного класса обратных задач для квазилинейных эллиптических уравнений.

Обратные задачи для квазилинейных уравнений эллиптического типа рассмотрены в работах [1-2]. Пусть $D-$ ограниченная область двумерного евклидова пространства E_2,(x,y)-произвольная точка области D, Γ-граница области D, предполагаемая достаточна гладкой, p_0, p_1-заданные числа, $Q \equiv p_0, p_1$. Рассмотрим задачу об определении {$k_1(u)$, $k_2(u)$, $q(u)$, $u(x,y,p)$} из следующих условий

$$-k_1(u)u_{xx} - k_2(u)u_{yy} + q(u)u = h(x,y,p), \quad (x,y)\in D, \qquad p\in Q, \quad (1)$$

$$u(x,y,p)\big|_\Gamma = f(\xi,\eta,p), (\xi,\eta)\in\Gamma, \quad p\in Q, \quad (2)$$

$$k_1(f_1)u_\nu(\xi_1,\eta_1,p) = g_1(p), \qquad p\in Q, \quad (3)$$

$$k_2(f_2)u_\nu(\xi_2,\eta_2,p) = g_2(p), \qquad p\in Q, \quad (4)$$

$$k_2(f_3)u_\nu(\xi_3,\eta_3,p) = q(f_3)\phi(p) + g_3(p), \quad p\in Q, \quad (5)$$

где (ξ_i,η_i), i=1,2,3, – фиксированные точки границы Г, $f_i \equiv f_i(p) = f(\xi_i,\eta_i)$, i=1,2,3, h(x,y,p), $f(\xi,\eta,p)$, $\phi(p), g_i(p), i=1,2,3$, - заданные функции, h(x,y,p), $f(\xi,\eta,p)$ при любом $p\in Q$ принадлежат пространствам $C_\alpha(\overline{D})$ и $C_{2+\alpha}(\Gamma)$, соответственно по p принадлежат $C_\alpha(Q)$, $g_i(p)\in C_\alpha(Q), i=1,2,3$, $\phi(p)\in C_\alpha(Q)$, ν-направление внутренней нормали к границе в точке $(\xi_i,\eta_i), u_\nu(\xi_i,\eta_i) \equiv \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi_i,\eta_i,p)$, i=1,2,3, R_1,R_2 некоторые числа.

Предположим, что функции $f_i(p), i=1,2,3$, имеют обратные $\Phi_i(f_i)$, i=1,2,3, определенные на [R_1,R_2], в области значения на Q и принадлежащие $C_\alpha(Q)$.

Определение 1. Систему {k_1(u), k_2(u), q(u), u(x,y,p)} назовем решением задачи (1)-(5), если 0<k_1(u), k_2(u), $\mathrm{q(u)} \in C_\alpha[R_1, R_2]$, $\mathrm{u(x,y,p)} \in C(\overline{D}\mathrm{x}Q)$, функции u(x,y,p) при любом *p* принадлежит $C_2(D)$, существуют пределы $\lim\limits_{(x,y)\to(\xi_i,\eta_i)} \mathrm{u(x,y,p)}$ i=1,2,3 и удовлетворяются соотношения (1)-(5).

Пусть, кроме задачи (1)-(5) имеется еще задача $(\bar{1})-(\bar{5})$, где все функции, входящие в (1)-(5), заменены соответствующими функциями с чертой. Положим

$$\mathrm{Z(x,y,p)} = \overline{\mathrm{u}}\mathrm{(x,y,p)} - \mathrm{u(x,y,p)}, \lambda_i(\overline{\mathrm{u}},\mathrm{u}) = \overline{\mathrm{k}}_i(\overline{\mathrm{u}}) - \mathrm{k}_i(\mathrm{u}), i=1,2,$$

$$\lambda_3(\overline{\mathrm{u}},\mathrm{u}) = \overline{\mathrm{q}}(\overline{\mathrm{u}}) - \mathrm{q(u)}, \delta_1\mathrm{(x,y,p)} = \overline{\mathrm{h}}\mathrm{(x,y,p)} - \mathrm{h(x,y,p)}, \delta_2(\xi,\eta,\mathrm{p}) =$$

$$= \overline{f}(\xi,\eta,\mathrm{p}) - f(\xi,\eta,\mathrm{p}), \delta_{i+2}(\mathrm{p}) = \overline{\mathrm{g}_i}(\mathrm{p}) - \mathrm{g}_i(\mathrm{p}), i=1,2,3, \delta_6(\mathrm{p}) = \overline{\varphi}(\mathrm{p}) - \varphi(\mathrm{p}).$$

Через $\widetilde{\delta}_2\mathrm{(x,y,p)}$ обозначим функцию на Г, совпадающую с $\delta_2(\xi,\eta,\mathrm{p})$ и при любом р принадлежащую $C_{2+\alpha}(\overline{D})$. Функция $\widetilde{f}\mathrm{(x,y,p)}$ на Г совпадает с $f(\xi,\eta,\mathrm{p})$.

Определение 2. Если для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при выполнении условий

$$\left\|\delta_1\mathrm{(x,y,p)}\right\|_{C(\overline{D}\mathrm{x}Q)} < \delta, \left\|\delta_2\mathrm{(x,y,p)}\right\|_{C(\overline{D}\mathrm{x}Q)} < \delta, \max_{\mathrm{p}}\left|\delta_1(\mathrm{p})\right| < \delta, i=3,4,5,6, \quad (6)$$

выполняются неравенства $\left|\mathrm{Z(x,y,p)}\right| < \varepsilon, \left|\lambda_i(\overline{\mathrm{u}},\mathrm{u})\right| < \varepsilon, i=1,2,3$, при $\mathrm{(x,y)} \in \overline{D}, \mathrm{p} \in Q$, тогда скажем, что решение задачи (1)-(5) устойчиво.

Теорема 1. Пусть $\mathrm{g}_i(\mathrm{p}) \neq 0$, i=1,2, $\phi(\mathrm{p}) \neq 0$, *N*mes*D*<1. Тогда решение задачи (1)-(5) единственно и устойчиво, где *N*–положительное постоянное, зависящее от данных и решений задачи .

Доказательство. Из $(\bar{1})-(\bar{5})$, соответственно, вычтем (1)-(5) и положим $\mathrm{Z_1(x,y,p)} = \mathrm{Z(x,y,p)} - \widetilde{\delta}_2\mathrm{(x,y,p)}$. Тогда получим

$$-\overline{\mathrm{k}_1}(\overline{\mathrm{u}})\mathrm{Z}_{1xx} - \overline{\mathrm{k}_2}(\overline{\mathrm{u}})\mathrm{Z}_{1yy} + \overline{\mathrm{q}}(\overline{\mathrm{u}})\mathrm{Z}_1 = \sum_{j=1}^{3}\lambda_j(\overline{\mathrm{u}},\mathrm{u})\alpha_j\mathrm{(x,y,p)} + \delta_7\mathrm{(x,y,p)}, \quad (7)$$

$$\mathrm{Z_1(x,y,p)}\big|_{\Gamma} = 0, \quad (8)$$

$$\lambda_i(\overline{f}, f_i) = \delta_{i+7}(\mathrm{p}) + \gamma_i(\mathrm{p})Z_{1\nu}(\xi_i,\eta_i,\mathrm{p}),\ i=1,2, \quad (9)$$

$$\lambda_3(\overline{f_3}, f_3) = \delta_{10}(\mathrm{p}) + \gamma_3(\mathrm{p})\mathrm{Z}_{1\nu}(\xi_3,\eta_3,\mathrm{p}) + \gamma_4(\mathrm{p})\lambda_2(\overline{f_3}, f_3), \quad (10)$$

где

$$\delta_7\mathrm{(x,y,p)} = \delta_1\mathrm{(x,y,p)} + \overline{\mathrm{k}_1}(\overline{\mathrm{u}})\widetilde{\delta}_{2xx}\mathrm{(x,y,p)} + \overline{\mathrm{k}_2}(\overline{\mathrm{u}})\widetilde{\delta}_{2yy}\mathrm{(x,y,p)} - \overline{\mathrm{q}}(\overline{\mathrm{u}})\widetilde{\delta}_2\mathrm{(x,y,p)},$$

$$\alpha_1(x,y,p)=u_{xx},\alpha_2(x,y,p)=u_{yy},\alpha_3(x,y,p)=-u,\gamma_i(p)=-\overline{k_1}(\overline{f_i})\left[u_\nu(\xi_i,\eta_i,p)\right]^{-1},i=1,2,$$

$$\gamma_3(p)=\overline{k_2}(\overline{f_3})\left[\phi(p)\right]^{-1},\gamma_4(p)=u_\nu(\xi_3,\eta_3,p)\left[\phi(p)\right]^{-1},$$

$$\delta_{i+7}(p)=\left[\delta_{i+2}(p)-\overline{k_i}(\overline{f_i})\overline{\delta}_{2\nu}(\xi_i,\eta_i,p)\right]\times\left[u_\nu(\xi_i,\eta_i,p)\right]^{-1},\ i=1,2,$$

$$\delta_{10}(p)=\left[-\delta_5(p)-\overline{q}(\overline{f_3})\overline{\delta}_6(p)+\overline{k_2}(\overline{f_3})\overline{\delta}_{2\nu}(\xi_3,\eta_3,p)\right]\left[\phi(p)\right]^{-1}.$$

При помощи функции Грина [3] из (7)-(8) определим функцию $Z_1(x,y,p)$ через правую часть равенства и это выражение подставим в условия (9) и (10). Тогда получим

$$\lambda_i(\overline{f_i},f_i)=\delta_{i+7}(p)+\gamma_i(p)\int_D\frac{\partial}{\partial\nu}G(\xi_i,\eta_i,\upsilon,\theta)\times$$

$$\left[\sum_{j=1}^{3}\alpha_j(\upsilon,\theta,p)\lambda_j(\overline{u},u)+\delta_7(\upsilon,\theta,p)\right]d\upsilon d\theta,\ i=1,2,$$

$$\lambda_3(\overline{f_3},f_3)=\delta_{10}(p)+\gamma_3(p)\int_D\frac{\partial}{\partial\nu}G(\xi_3,\eta_3,\upsilon,\theta)\times$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{3}\alpha_j(\nu,\theta,p)\lambda_j(\overline{u},u)+\delta_7(\nu,\theta,p)\right]d\nu d\theta+\gamma_4(p)\lambda_2(\overline{f_3},f_3).\qquad(11)$$

Теперь в системе (11) положим $\mu=\sum_{j=1}^{3}\max_{x,y,p}\left|\lambda_j(\overline{u},u)\right|$. Тогда из системы (11) следует, что

$$\left|\lambda_1(\overline{f_1},f_1)\right|\le\delta_{11}(p)+\mu\int_D K_1(\xi_1,\eta_1,\upsilon,\theta)d\upsilon d\theta,\ \left|\lambda_2(\overline{f_2},f_2)\right|\le\delta_{12}(p)+\mu\,\cdot$$

$$\cdot\int_D K_2(\xi_2,\eta_2,\upsilon,\theta)d\upsilon d\theta,$$

$$\left|\lambda_3(\overline{f_3},f_3)\right|\le\delta_{13}(p)+\mu\int_D K_3(\xi_3,\eta_3,\upsilon,\theta)d\upsilon d\theta+\left|\gamma_4(p)\right|\left|\lambda_2(\overline{f_3},f_3)\right|,\qquad(12)$$

здесь $\delta_{11}(p),\delta_{12}(p),\delta_{13}(p)$ - функции, стремящиеся к нулю при условиях (6). Из оценок производных функций Грина [3] следуют оценки для функций $K_i(\xi_i,\eta_i,\upsilon,\theta)$, i=1,2,3:

$$\left|K_i(\xi_i,\eta_i,\upsilon,\theta)\right|\le M_1\left[(\xi_i-\upsilon)^2+(\eta_i-\theta)^2\right]^{-1/2},\ i=1,2,3;\ M_1>0.\qquad(13)$$

Обозначим $T_i=\int_D K_i(\xi_i,\eta_i,\upsilon,\theta)d\upsilon d\theta$, i=1,2,3.

При достаточно малой мере D для указанных интегралов существует оценка $M_2[\mathrm{mes}\,D]^{1/2}$, $M_2>0$. Из системы (12) получаем, что

$$\mu\le\delta_{14}(p)+\mu N\mathrm{mes}D.\qquad(14)$$

По условию теоремы $\beta=N\mathrm{mes}\,D<1$. Тогда для μ имеем:

$$\mu\le\delta_{14}(p)(1-\beta)^{-1},\qquad(15)$$

δ_{14}(p)- функция, стремящиеся к нулю при условиях (6). Следовательно, μ стремится к нулю при $\delta \to 0$ в условиях (6). Теорема доказана.

Метод последовательных приближений для решения задачи (1)-(5) применялся по схеме

$$-k_1^{(S)}(u^{(S)})u_{xx}^{(S+1)}-k_2^{(S)}(u^{(S)})u_{yy}^{(S+1)}+q^{(S)}(u^{(S)})u^{(S+1)}=h(x,y,p),(x,y)\in D,\ p\in Q, \quad (16)$$

$$u^{(S+1)}(x,y,p)|_{\Gamma}=f(\xi,\eta,p),\ (\xi,\eta)\in\Gamma,\ p\in Q, \quad (17)$$

$$-k_i^{(S+1)}(u^{(S+1)})u_v^{(S+1)}(\xi_i,\eta_i,\Phi_i(u^{(S+1)}))=g_i(\Phi_i(u^{(S+1)})),\ i=1,2, \quad (18)$$

$$-k_2^{(S+1)}(u^{(S+1)})u_v^{(S+1)}(\xi_3,\eta_3,\Phi_3(u^{(S+1)}))=q(u^{(S+1)})\phi(\Phi_3(u^{(S+1)}))+g_3(\Phi_3(u^{(S+1)})). \quad (19)$$

По схеме (16)-(19) последовательные итерации проводятся следующим образом: сперва выбирается некоторое $u^{(0)}(x,y,p)\in C(\overline{D}xQ)$ при любом p, принадлежащее $C_2(D)$. Потом выбираются $k_1^{(0)}(u^{(0)})>0, k_2^{(0)}(u^{(0)})>0, q^{(0)}(u^{(0)})>0$, принадлежащие $C_\alpha[R_1,R_2]$, $0<\alpha<1$ и подставляются в уравнение (16). Далее решается задача (16)-(17) и находится $u^{(1)}(x,y,p)$. По функциям $u_v^{(1)}(\xi_i,\eta_i,\Phi_i(u^{(1)}))$, i=1,2,3 из условий (18), (19) находятся $k_1^{(1)}(u^{(1)})$, $k_2^{(1)}(u^{(1)}), q^{(1)}(u^{(1)})$ и эти функции используются для проведения следующего шага итерации.

Теорема 2. Пусть решение задачи (1)-(5) существует и при всех $s=0,1,\dots,u^{(S)}(x,y,p)\in C(\overline{D}xQ)$, $u^{(S)}(x,y,p)$ при любом p принадлежит $C_2(D)$, $k_i^{(S)}(u^{(S)})\in C_\alpha[R_1,R_2]$, i=1,2, $q^{(S)}(u^{(S)})\in C_\alpha[R_1,R_2]$, $g_i(p)u_v^{(S)}(\xi_i,\eta_i,p)>0$, i=1,2, $\phi(p)u_v^{(S)}(\xi_3,\eta_3,p)>0$, $g_3(p)u_v^{(S)}(\xi_3,\eta_3,p)<0$, $N\mathrm{mes}D<1$, производные функции $u^{(S)}$(x, y,p) по x,y до второго порядка равномерно ограничены. Тогда функции $\{k_1^{(S)}(u^{(S)}),k_2^{(S)}(u^{(S)}),q^{(S)}(u^{(S)}),u^{(S)}(x,y,p)\}$, полученные методом последовательных приближений (16)-(19), при $s\to+\infty$ равномерно сходятся к решению задачи (1)-(5) со скоростью геометрической прогрессии, где N-положительное постоянное, зависящее от данных задачи.

Доказательство. Положим

$$Z^{(S)}(x,y,p)=u(x,y,p)-u^{(S)}(x,y,p), \lambda_i^{(S)}(u,u^{(S)})=k_i(u)-k_i^{(S)}(u^{(S)}),$$

$$i=1,2,\ \lambda_3^{(S)}(u,u^{(S)})=q(u)-q^{(S)}(u^{(S)}).$$

Легко проверить, что эти функции удовлетворяют системе:

$$-k_1(u)Z_{xx}^{(S+1)}-k_2(u)Z_{yy}^{(S+1)}+q(u)Z^{(S+1)}=\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^{(S)}(x,y,p)\lambda_j^{(S)}(u,u^{(S)}), \quad (20)$$

$$Z^{(S+1)}(x,y,p)\big|_{\Gamma}=0, \quad (21)$$

$$\lambda_i^{(S+1)}(f_i, f_i^{(S+1)}) = \gamma_i^{(S)}(\mathrm{p})\mathrm{Z}_\upsilon^{(S+1)}(\xi,\eta,\mathrm{p}),\ i=1,2, \tag{22}$$

$$\lambda_3^{(S+1)}(f_3, f_3^{(S+1)}) = \gamma_3^{(S)}(\mathrm{p})\mathrm{Z}_\upsilon^{(S+1)}(\xi,\eta,\mathrm{p}) + \gamma_4(\mathrm{p})\lambda_2^{(S+1)}(f_3, f_3^{(s+1)}), \tag{23}$$

где

$\alpha_1^{(S)}(\mathrm{x,y,p}) = \mathrm{u_{xx}}^{(S+1)}, \alpha_2^{(S)}(\mathrm{x,y,p}) = \mathrm{u_{yy}}^{(S+1)}, \alpha_3^{(S)}(\mathrm{x,y,p}) = -\mathrm{u}^{(S+1)}, \gamma_i^{(S)}(\mathrm{p}) = \mathrm{k}_i(f_i)\times$

$\times[-\mathrm{u}_\nu^{(S+1)}(\xi_i,\eta_i,\mathrm{p})]^{-1}, i=1,2, \gamma_3(\mathrm{p}) = \mathrm{k}_2(f_3)[\phi(\mathrm{p})]^{-1}, \gamma_4^{(S)}(\mathrm{p}) = \mathrm{u}_\nu^{(S+1)}(\xi_3,\eta_3,\mathrm{p})\times[\phi(\mathrm{p})]^{-1}$.

Функцией Грина из (20)-(21) определим $\mathrm{Z}^{(S+1)}(\mathrm{x,y,p})$ через правую часть равенства (20) и подставим это выражение в условия (22) и (23). Тогда получим

$$\lambda_i^{(S+1)}(f_i, f_i^{(S+1)}) = \gamma_i^{(S)}(\mathrm{p})\int_D G_\nu(\xi_i,\eta_i,\upsilon,\theta)\times[\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^{(S)}(\upsilon,\theta,p)\lambda_j^{(S)}(\mathrm{u},\mathrm{u}^{(S)})]d\upsilon d\theta,$$

$$i=1,2, \tag{24}$$

$$\lambda_3^{(S+1)}(f_3, f_3^{(S+1)}) = \gamma_3^{(S)}(p)\int_D G_\nu(\xi_3,\eta_3,\upsilon,\theta)\times$$

$$\times[\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^{(S)}(\upsilon,\theta,\mathrm{p})\lambda_j^{(S)}(\mathrm{u},\mathrm{u}^{(S)})]d\upsilon d\theta + \gamma_4(\mathrm{p})\lambda_2^{(S+1)}(f_3, f_3^{(S+1)}).$$

Положим $\mu^{(S)} = \sum_{j=1}^{3}\max\left|\lambda_j^{(S)}(\mathrm{u},\mathrm{u}^{(S)})\right|$. Прежним путем из системы (24) следует, что

$$\mu^{(S+1)} \le \mu^{(S)} N\mathrm{mes}D, \tag{25}$$

где N- постоянная, которая входит в неравенство (14).

Существование решения задачи (1)-(5) доказывается для частных случаев.

1.Пусть $\mathrm{k}_i(\mathrm{u})>0$, $i=1,2$- заданные функции, из условий (1)-(2), (5) требуется определить функции $\{\mathrm{q(u),u(x,y,p)}\}$.

Теорема 3. Пусть $\mathrm{h(x,y,p)}=0$, $f(\xi,\eta,\mathrm{p}) \ge 0, \mathrm{g}_3(\mathrm{p}) = 0, \phi(\mathrm{p}) < 0$, $N\mathrm{mes}D<1$. Тогда задача (1)- (2), (5) имеет хотя бы одно решение, где N – положительное число, зависящие от данных задачи.

Доказательство. Нетрудно проверить, что при всех приближениях q(u) положительна. В силу принципа максимума [4] для решения задачи (16)-(17) справедлива оценка

$$\left\|\mathrm{u}^{(S+1)}\right\|_{C(\bar{D}\mathrm{x}Q)} \le \left\|f\right\|_{C(\bar{D}\mathrm{x}Q)},$$

т.е. последовательность $\{\mathrm{u}^{(S)}(\mathrm{x,y,p})\}$ равномерно ограничена. Докажем равномерную ограниченность последовательности $\{\mathrm{q}^{(S)}(\mathrm{u}^{(S)})\}$. Переносим слагаемое $\mathrm{q}^{(S)}(\mathrm{u}^{(S)})\mathrm{u}^{(S+1)}$ в правую часть уравнения (16) и функцией Грина найдем выражение для $\mathrm{u}^{(S+1)}(\mathrm{x,y,p})$.

$$\mathrm{u}^{(S+1)}(\mathrm{x,y,p}) = \int_D G(\mathrm{x,y},\upsilon,\theta)[k_1(u^{(S)})\tilde{f}_{\nu\nu}(\nu,\theta,p) + k_2(u^{(S)})\tilde{f}_{\theta\theta}(\upsilon,\theta,p) -$$

$$- \mathrm{q}^{(S)}(\mathrm{u}^{(S)})\mathrm{u}^{(S+1)}]d\upsilon d\theta + \tilde{f}(\mathrm{x,y,p}).$$

Подставив это выражение в условие (19) при $(\mathrm{x,y})=(\xi_3,\eta_3)$, получим

$$q^{(S+1)}(f_3)=F^{(S)}(p)-k_2(f_3)[\phi(p)]^{-1}\int_D G(\xi_3,\eta_3,\upsilon,\theta)q^{(S)}(u^{(S)})u^{(S+1)}(\upsilon,\theta,p)d\upsilon d\theta, \quad (26)$$

где

$$F^{(S)}(p)=k_2(f_3)[\phi(p)]^{-1}[\tilde{f}_v(\xi_3,\eta_3,p)+\int_D G_v(\xi_3,\eta_3,\upsilon,\theta)\times$$

$$\times[k_1(u^{(S)})\tilde{f}_{vv}(\upsilon,\theta,p)+k_2(u^{(S)})\tilde{f}_{\theta\theta}(\upsilon,\theta,p)]d\upsilon d\theta.$$

Положим $q_1^{(S)}=\max\limits_{R_1\le u^{(S)}\le R_2}\left|q^{(S)}(u^{(S)})\right|$. Тогда из (26) при достаточной малости меры D имеем:

$$q_1^{(S+1)}\le M_3+M_4\mathrm{mes}Dq_1^{(S)},$$

здесь $M_i>0$, i=3,4 не зависят от s. Обозначим N=M_4.

Тогда из этого неравенства вытекает равномерная ограниченность последовательности $\{q^{(S)}(u^{(S)})\}$. Таким образом, при всех приближениях $q^{(S)}(u^{(S)})$ непрерывная и равномерно ограниченная функция. Тогда из общей теории эллиптических уравнений следует, что при условиях теоремы последовательность $\{u^{(S)}(x,y,p)\}$ равномерно ограничена по норме $W_{p_1}^{\;2}(D),\forall p_1\ge 2,\ \ p\in Q$. Поэтому $u^{(S)}(x,y,p)$ компактно в $C_1(\overline{D})$. При этом из условия (19) следует, что последовательность $\{q^{(S)}(u^{(S)})\}$ будет компактна в $C[R_1,R_2]$. Отсюда и из (16), (17) вытекает компактность $\{u^{(S)}(x,y,p)\}$ в $C_2(\overline{D})$. В системе (16), (17), (19) переходя к пределу при $s\to+\infty$, получим, что существует пара функций $\{q(u),\ u(x,y,p)\}$, удовлетворяющая условиям задачи (1),(2),(5). Теорема доказана.

2.Пусть q(u)-заданная функция. Из условий (1)-(4) требуется определить функции $\{k_1(u),k_2(u),u(x,y,p)\}$. В частном случае рассмотрим определение функции $k_1(u),k_2(u),u\,(x,y)$ в прямоугольной области

$$-k_1(u)u_{xx}-k_2(u)u_{yy}+q(u)u=h(x,y),\quad (x,y)\in D, \quad (27)$$

$$u(x,0)=\varphi_1(x),u(x,l_2)=\varphi_2(x),\qquad 0\le x\le l_1, \quad (28)$$

$$u(0,y)=\phi_1(y),u(l_1,y)=\phi_2(y),\qquad 0\le y\le l_2, \quad (29)$$

$$k_1(\phi_1(y))u_x(0,y)=g_1(y),\qquad 0\le y\le l_2, \quad (30)$$

$$k_2(\varphi_1(x))u_y(x,0)=g_2(x),\qquad 0\le x\le l_1, \quad (31)$$

удовлетворяющие условиям

$$\varphi_1(0)=\phi_1(0),\varphi_1(l_1)=\phi_2(0),\varphi_2(l_1)=\phi_2(l_2),\phi_1(l_2)=\varphi_2(0),$$

здесь $D=\{(x,y)|0<x<l_1,0<y<l_2\}$.

Метод последовательных приближений к задаче (27)-(31) применяется аналогично к схеме (16)-(19). Сперва докажем одну лемму.

Лемма. Пусть задача

$$-a(x,y)\,u_{xx}-b(x,y)u_{yy}+u=0\qquad (x,y\in D),$$

$$u(x,0)=\varphi_1(x),u(x,l_2)=\varphi_2(x),\qquad 0\le x\le l_1,$$

$$u(0,y)=\phi_1(y),u(l_1,y)=\phi_2(y),\qquad 0\le y\le l_2,$$

удовлетворяющее условиям $\varphi_1(0)=\phi_1(0),\varphi_1(l_1)=\phi_2(0),\varphi_2(l_1)=\phi_2(l_2),\phi_1(l_2)=\varphi_2(0)$ при заданном $a(x,y)\ge\mu_0$, $b(x,y)\ge\mu_0$, $\mu_0>0$ имеет решение, принадлежащие $C_2(D)\cap C(\overline{D})$ и $n(x)\le\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\le Ml_2$, $m(y)\le\phi_1(y)-\phi_2(y)\le Ml_1$, $\varphi_2(x)\ge 0,\phi_2(y)\ge 0$,

$\varphi_1(0)\ge\varphi_1(x)+m(0)xl_1^{-1}$, $\varphi_2(0)\ge\varphi_2(x)+m(l_2)xl_1^{-1}$, $\phi_1(0)\ge\phi_1(y)+n(0)yl_2^{-1}$,

$\phi_2(0)-\phi_2(y)\ge n(l_1)yl_2^{-1}$, $\varphi_{ix}(x)\ge -M, i=1,2,\phi_{iy}(y)\ge -M, i=1,2,$

$\varphi_{ixx}(x)=0,\phi_{iyy}(y)=0$,

тогда

$$-M-\phi_1(y)(2\mu_0)^{-1}l_1\le u_x(0,y)\le -m(y)l_1^{-1}, \qquad (32)$$

$$-M-\varphi_1(x)(2\mu_0)^{-1}l_2\le u_y(x,0)\le -n(x)l_2^{-1}, \qquad (33)$$

где

$m(y)\in C_2[0,l_2],n(x)\in C_2[0,l_1],m''(y)\ge 0,n''(x)\ge 0,M=\max\{\max\limits_{i=1,2}\max\limits_{x}|\varphi_{ix}(x)|,$

$\max\limits_{i=1,2}\max\limits_{y}|\phi_{iy}(y)|,\max\limits_{x} l_2^{-1}[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)],\max\limits_{x} l_1^{-1}[\phi_1(y)-\phi_2(y)]\}$.

Доказательство. Положим

$\upsilon(x,y)=u(x,y)+mxl_1^{-1}-\phi_1(y),V(x,y)=-u(x,y)+\phi_1(y)-Mx-\phi_1(y)(2\mu_0)^{-1}x(l_1-x),$

$\upsilon_1(x,y)=u(x,y)+nyl_2^{-1}-\varphi_1(y),V_1(x,y)=-u(x,y)+\varphi_1(x)-My-\varphi_1(x)(2\mu_0)^{-1}y(l_2-y).$

Нетрудно проверить, что $\upsilon(x,y)$ удовлетворяет условиям задачи:

$$-a(x,y)\upsilon_{xx}-b(x,y)\upsilon_{yy}+\upsilon=-\phi_1(y)+xm(y)l_1^{-1},$$

$\upsilon(x,0)=\varphi_1(x)-\varphi_1(0)+xm(0)l_1^{-1}$,

$\upsilon(x,l_2)=\varphi_2(x)-\varphi_2(0)+xm(l_2)l_1^{-1}$ $\upsilon(0,y)=0$,

$$\upsilon(l_1,y)=-\phi_1(y)+m(y)+\phi_2(y).$$

Поэтому, по условию леммы, наибольшее положительное значение функции $\upsilon(x,y)$ достигается при $x=0$. Тогда $\upsilon_x(0,y)\le 0$, другими словами

$$u_x(0,y)\le -m(y)l_1^{-1}. \qquad (34)$$

Аналогично, прежним путём, при условиях леммы следует, что наибольшее положительное значение функция $V(x,y)$ достигает при $x=0$, поэтому $V_x(0,y)\le 0$ или

$$-M-\phi_1(y)(2\mu_0)^{-1}l_1\le u_x(0,y). \qquad (35)$$

Объединяя оценки (34)и(35), получим оценку (32). Аналогично, прежним путем, получим (33). Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть

$\varphi_i(x)\in C_{2+\alpha}(0,l_1)\cap C[0,l_1],\phi_i(y)\in C_{2+\alpha}(0,l_2)\cap C[0,l_2],\quad i=1,2,$

$h(x,y)=0,q(u)=1$, $n(x)\le\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\le Ml_2$, $m(y)\le\phi_1(y)-\phi_2(y)\le Ml_1$,

$\varphi_2(x)\ge 0,\phi_2(y)\ge 0,$

$\varphi_1(0) \ge \varphi_1(\mathrm{x}) + m(0)\mathrm{x}l_1^{-1}$, $\varphi_2(0) \ge \varphi_2(\mathrm{x}) + m(l_2)\mathrm{x}l_1^{-1}$, $\phi_1(0) \ge \phi_1(\mathrm{y}) + n(0)\mathrm{y}l_2^{-1}$,
$\phi_2(0) - \phi_2(\mathrm{y}) \ge n(l_1)\mathrm{y}l_2^{-1}$, $\varphi_{ix}(0) < 0, \phi_{iy}(\mathrm{y}) < 0, i = 1,2$,
$\varphi_{ix}(\mathrm{x}) \ge -M, i = 1,2, \phi_{iy}(\mathrm{y}) \ge -M, i = 1,2$, $\varphi_{1xx}(\mathrm{x}) = 0, \phi_{1yy}(\mathrm{y}) = 0$,
$g'_0 \le -g_1(\mathrm{y}) - \frac{1}{2}\phi_1(\mathrm{y})l_1, g''_0 \le -g_2(\mathrm{x}) - \frac{1}{2}\phi_1(\mathrm{x})l_2$, $g_1(y)<0$, $g_2(x)<0$, NmesD<1, n(x), m(y)-такие неотрицательные функции, что $g_1(y)[m(y)]^{-1}$ и $g_2(x)[n(x)]^{-1}$ ограниченны, g'_0, g''_0- положительные числа. Тогда задача (23)-(31) имеет хотя бы одно решение, где N-положительное число, зависящее от данных задачи.

Доказательство. Доказательство проводится методом последовательных приближений. Из утверждения леммы следует, что

$$-M[1 + \phi_1(\mathrm{y})(2g'_0)^{-1}l_1] \le \mathrm{u}_\mathrm{x}^{(S+1)}(0, \mathrm{y}) \le -m(\mathrm{y}) \cdot l_1^{-1}, \qquad 0 < \mathrm{y} < l_2,$$
$$-M[1 + \varphi_1(\mathrm{x})(2g''_0)^{-1}l_2] \le \mathrm{u}_y^{(S+1)}(\mathrm{x},0) \le -n(\mathrm{x}) \cdot l_2^{-1}. \qquad 0 < \mathrm{x} < l_1,$$

Тогда

$$g'_0 M^1 \le k_1^{(S+1)}(u^{(S+1)}) \le \max_y \{-g_1(y)[m(y)]^{-1}\} \cdot l_1,$$
$$g''_0 M^1 \le k_2^{(S+1)}(u^{(S+1)}) \le \max_x \{-g_2(x)[n(x)]^{-1}\} \cdot l_2 .$$

Таким образом, при всех приближениях $k_1^{(S)}(u^{(S)})$, $k_2^{(S)}(u^{(S)})$ – строго положительные, непрерывные и равномерно ограниченные функции. Тогда из общей теории эллиптических уравнений следует, что при условиях теоремы последовательность $\{u^{(S)}(x,y)\}$ равномерно ограничена по норме $W_{p_1}^{\,2}(D), \forall \mathrm{p}_1 > 2$. Поэтому $\{u^{(S)}(x,y)\}$ компактна в $C_1(\overline{D})$. При этом из условий (18) следует, что для прямоугольной области последовательности $\{k_1^{(S)}(u^{(S)}),k_2^{(S)}(u^{(S)}),\}$ будут компактны в $C[R_1,R_2]$. Отсюда и из (16)-(17) вытекает компактность $\{u^{(S)}(x,y)\}$ в $C_2(\overline{D})$ для прямоугольной области. В системе (16)-(18), переходя к пределу при $s \to +\infty$, получаем, что существует пара функции $\{k_1(u), k_2(u), u(x,y)\}$, удовлетворяющая условиям (27)-(31). Теорема доказано.

Для задачи (27)-(31) $\widetilde{f}(x, y)$ нужно брать в следующем виде:

$$\widetilde{f}(\mathrm{x,y}) = \frac{l_1 - \mathrm{x}}{l_1}\phi_1(\mathrm{y}) + \frac{l_2 - \mathrm{y}}{l_2}[\varphi_1(\mathrm{x}) - \varphi_1(0) + \frac{\mathrm{x}}{l_1}\varphi_1(0)] + \frac{\mathrm{x}}{l_1}[\phi_2(\mathrm{y}) - \phi_2(0) + \frac{\mathrm{y}}{l_2}\phi_2(0)] + \frac{\mathrm{y}}{l_2}[\varphi_2(\mathrm{x}) -$$
$$- \varphi_2(0) + \frac{\mathrm{x}}{l_1}\varphi_2(0)] - \frac{\mathrm{xy}}{l_1 l_2}\phi_2(l_2) .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Искендеров А.Д. Обратная задача об определении коэффициентов квазилинейного эллиптического уравнения // Изв. А.Н. Аз.ССР, 1978, №2, с.80-85.
2. Клибанов М.В. Единственность в целом обратных задач для одного класса дифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ня, 1984, т. 20, №11, с.1947-1953.
3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957, 256 с.

KVAZİ-XƏTTİ ELLİPTİK TİP TƏNLİYİN BƏZİ ƏMSALLARININ TƏYİNİ

R.A.ƏLİYEV, İ.A.QURBANOV

XÜLASƏ

Bir sıra tətbiqi məsələlərdə elliptik tip tənliyin əmsallarının təyini həll haqqında müəyyən əlavə informasiyanın verilməsi ilə bağlıdır. Xüsusi halda mühitin istilik xarakteristikalarının təyini stasionar halda elliptik tip tənliklərə gətirir. Məqalədə kvazi elliptik tip tənliyin əmsallarını təyin etməyə dair tərs məsələnin korrektliyi araşdırılır.

THE DETERMINATION OF SEVERAL COEFFICIENTS IN QUASI-LINEAR ELLIPTIC EQUATION

R.A.ALIYEV, I.A.QURBANOV

SUMMARY

A number of applied matters is connected with the definition of the coefficients of elliptic equations on some additional information about the solution. The determination of the thermophysics of the stationary environment brings up to the reverse problems for the elliptic equations.

The current work deals with the investigation of correctness of the same class reverse problems for the quasi-linear elliptic equations.